2 11/4/2017

Μιγαδικές

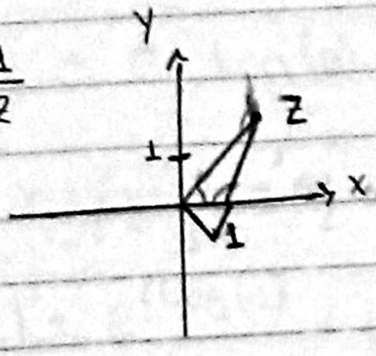
→ $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_v z^v$

$p(z) = z^2 = z \cdot z$

$z^2 + 4z + 3i$

• Ρητές: $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ (ο αριθμητης και ο παρανομαστης δεν εχουν κοινες ριζες)

$r(t) = \dfrac{1}{z}$



$\dfrac{1}{z} = \omega = \dfrac{\omega}{1}$

$r(t) = \dfrac{1}{z} + z = \dfrac{z^2+1}{z}$

Εκθετικη:

$e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dots \quad , z \in \mathbb{C}$

περιοδικη: με περιοδο $2\pi i$

$e^{z+2\pi i} = e^z$

$z = iy \mid e^{iy} = \sigma\upsilon\nu y + i\,\eta\mu y$

$\sigma\upsilon\nu y = \dfrac{e^{iy} + e^{iy}}{2}$ $\qquad \eta\mu y = \dfrac{e^{iy} - e^{iy}}{2i} \rightarrow |\eta\mu y| \leq 1$

$\eta\mu z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\qquad \sigma\upsilon\nu z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Λογαριθμος

Ειναι η αντιστροφη ~~της~~ της εκθετικης

$\log z = w : e^{\log(z)} = z : e^{w} = z$

$\to \log z = \log|z| + i\arg(z)$

Βασικος κλαδος $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$

$\left(e^{\mathrm{Log}(z)}\right)' = z' = 1$

$e^{\mathrm{Log} z} \cdot (\mathrm{Log} z)' = 1 \to \mathrm{Log}(z)' = \frac{1}{z}$

Ασκηση: $f(z) = \mathrm{Log}(z^2 - 3i)$ που παραγωγιζεται και ποια ειναι η παραγωγος.

$J + |J| = 0$

$J = z^2 - 3i$

$|J| = |(x+iy)^2 - 3i| = |x^2 + 2xyi - y^2 - 3i| =$

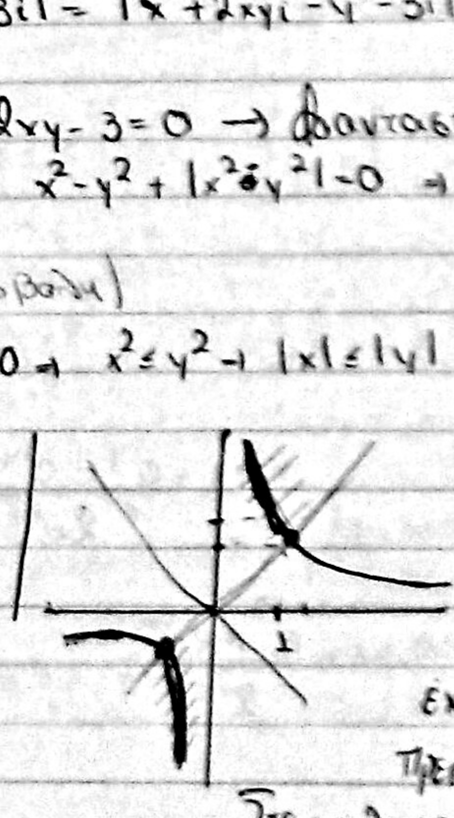
$2xy - 3 = 0 \to$ φανταστικο μερος

$x^2 - y^2 + |x^2 - y^2| = 0 \to$ πραγματικο μερος

$xy = 3/2$ (υπερβολη)

$x^2 - y^2 \leq 0 \to x^2 \leq y^2 \to |x| \leq |y|$

αν χ αρνητικο



χθετικο y

Στα σημεια που

εχω σημειωσει

Πρεπει να εξερευνω

Στα υπολοιπα ειναι ολομορφη η f.

• Ύψωση a^z

1) $a^z = e^{z\log(a)}$, $a \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$f'(z) = e^{z\log(a)} \cdot \log(a)$

$f'(z) = e^{z\,\mathrm{Log}(a)}\,\mathrm{Log}(a)$

$= a^z\,\mathrm{Log}(a)$

• π.χ. $(i)^i$

$(i)^i = e^{i\,\mathrm{Log}(i)} = e^{i(\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i))} = e^{i(i\pi/2)}$

$= e^{-\pi/2}$

$\boxed{i^i = e^{-\pi/2}}$

2) z^a

$f(z) = z^a = e^{a\log(z)}$ ✓ Αυτή δεν ορίζεται για όλα τα z ($z=0$ δεν γίνεται)
$z \neq |z| \neq 0$ (εκεί ορίζεται)

Υπερβολικές

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ Προσοχή στους τύπους

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = e^z - e^{-z}/2$

e^i, $e^{2i}, \dots, e^{\nu i}$ ⇒ όλα περπατούν πάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$|e^i| = |\sigma\upsilon\nu(1) + i\,\eta\mu(1)| = 1$

Είναι πυκνά πάνω στην περιφέρεια του κύκλου

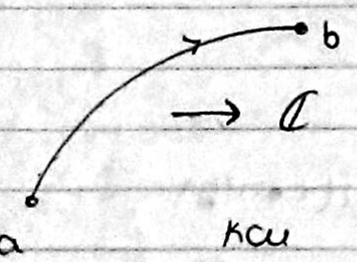
Οι προβολες στον οριζοντιο αξονα ειναι επισης πυκνες.

$συν(ν) - α_ν$ $\quad \forall x \in [-1,1] : \exists k_ν : x = \lim συν(k_ν)$

$ημ(ν) = β_ν$ $\quad : \exists λ_ν \ x = \lim ημ(λ_ν)$

$$e^{iν} = α_ν + β_ν$$

Εχω μια καμπυλη γ:



αρχικο σημειο a και τελικο το b

Ειναι διαφορισιμη

περνουμε κ f συνεχης (οριζεται στα σημεια της καμπυλης) και η γ εχει παραμετρικη παρασταση

$z = z(t)$

Η $z'(t)$ $\exists$ και ειναι συνεχης $\Rightarrow$ γ συνεχης

$f(z(t)) \cdot z'(t)$

$$\int_a^β \overbrace{f(z(t)) \cdot z'(t)}^{\to φ(t)} dt$$

εχει πεπερασμενη τιμη

• $φ : [a,β] \to \mathbb{C}$: $\quad \int_a^β φ(t)dt = \int_a^β x(t)dt + i\int_a^β y(t)dt$

$φ(t) = x(t) + iy(t)$

$$\left| \int_a^β φ(t)dt \right| \leq \int_a^β |φ(t)|dt$$

Αποδειξη: $\quad a \leq t, s \leq β \quad (x(t), y(t)) \cdot (x(s), y(s))$

$= (x(t)x(s) + y(t) \cdot y(s)$

$x(t) \cdot y(t) + y(t) \cdot y(s) \leq \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cdot \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}$

ολοκληρωνοντας ως προς t και s καταληγω στο ζητουμενο

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$\int_a^B f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$

Το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του $z(t)$

Έστω $t = t(s)$, $s \in [a_0, B_0]$ (κάνω αναπαραμετροποίηση)

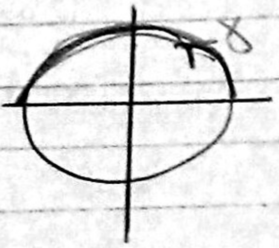
$w(s) = z(t(s))$, $s \in [a_0, B_0]$

Έχουμε $\int_{a_0}^{B_0} f(w(s))\, w'(s)\, ds = \int_{a_0}^{B_0} f(z(t(s)))\, z'(t(s)) \boxed{\cdot t'(s) ds}$ $dt(s)$

$= \int_{a_0}^{B_0} f(z(\underbrace{t(s)}_{t}))\cdot z'(\underbrace{t(s)}_{t})\,d\underbrace{t(s)}_{t}$

Παράδειγμα $\int_\gamma (z^2 + 3\sqrt{z})\,dz$

Εκείνος ο κλάδος που ισχύει $\sqrt{1} = -1$



$\gamma: z(t) = e^{it}$ $[0, \pi]$

$z^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} e^{\frac{it}{2}} \\ e^{\frac{i(t+2\pi)}{2}} \end{cases} = \begin{cases} e^{i\frac{t}{2}} \\ e^{i\frac{t}{2} + \pi i} \end{cases}$

για $t = 0$ $\sqrt{e^{it}} = \sqrt{1} = -1$

Από τους 2 κλάδους για $t=0$ (-1) παίρνω από του 2ο κλάδο

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$I = \int_0^\pi \left(e^{2it} + 3e^{i\frac{t}{2} + i\pi}\right) i e^{it}\,dt$

$= \int_0^\pi e^{3it}\cdot i\,dt - 3\int_0^\pi e^{\frac{3t}{2}i}\, i\,dt$

$= \frac{1}{3}\int_0^\pi e^{3it}\,d(3ti) - 2\int e^{\frac{3t}{2}i}\,d(\frac{3}{2}ti)$

$\frac{1}{3} e^{3it}\Big|_0^\pi - 2\cdot e^{\frac{3t}{2}i}\Big|_0^\pi = \dots = -\frac{2}{3} - 2\cdot(i-1) = \dots$

$\rightarrow \left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \int_a^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt \le \int_a^\beta |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,dt$ *

$\le$

$f: \gamma \to \mathbb{C}$ συνεχής.

γ συμπαγές.

Το ίδιο συμβαίνει και με την $|f|$ αλλά είναι και πραγματική η $|f| \Rightarrow \exists M>0: |f(z)| \le M \;\; \forall z \in \gamma$

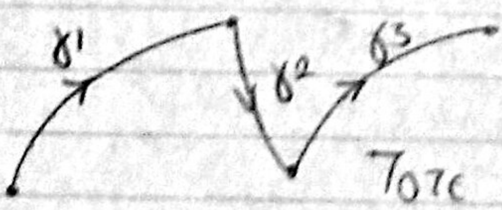
Άρα στην * $\le M \int_a^\beta |z'(t)|dt = M\int_a^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

$= M\cdot \mu(\gamma)$

Τελικά καταλήξαμε: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \sup_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot \mu(\gamma)$.

1) Εάν το μήκος της γ είναι μηδέν το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

2) Το $\sup|f(z)|$ είναι το μικρότερο M



Η καμπύλη αυτή είναι κατά τμήματα διαφορίσιμη.

Τότε για το ολοκλήρωμα ισχύει:

$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(z)dz$

$\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

Γενικά: $C = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$